

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ РАССЕЯНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация.

Актуальность и цели. Множества нелинейных уравнений в частных производных, обладающих парой Лакса, являются либо точно интегрируемыми, либо уравнениями, допускающими богатые классы точных решений. Наиболее интересны с практической точки зрения исследования, способствующие развитию новых математических методов анализа нелинейных дифференциальных уравнений, в частности математической теории солитонов, которая имеет огромные перспективы в различных приложениях. Малоисследованным является обширный класс нелинейных многокомпонентных уравнений, имеющих важность прикладного характера. Целью настоящей статьи является анализ такого типа нелинейных уравнений, в частности уравнения трехволнового взаимодействия, а также построение их точных решений.

Материалы и методы. Анализ рассматриваемых нелинейных уравнений в частных производных, полученных при помощи операторного уравнения Лакса с дифференциальными операторами первого порядка и матричными коэффициентами третьего порядка, выполняется с помощью замены переменных. Данный метод позволяет классифицировать их по главной линейной части и привести исходные уравнения к более простому, эквивалентному виду, облегчающему дальнейшие исследования. Для отыскания точных решений применяется метод бегущих волн.

Результаты. Исследуемые нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с логарифмической нелинейностью относятся к классу уравнений Клейна – Гордона и с помощью замены переменных их линейная часть преобразуется к гиперболическому виду. Найдены интегральные решения исследуемых уравнений в виде бегущих волн и решения, заданные неявно в виде ряда.

Выводы. Результаты представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих парой Лакса, и могут использоваться при решении прикладных задач физики и техники. Данные результаты расширяют область возможностей для изучения задач математической теории солитонов и могут послужить основой для дальнейшего исследования и нахождения решений уравнений данного типа.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, операторное уравнение Лакса, пара Лакса, нелинейные гиперболические уравнения, решения в виде бегущих волн.

Т. В. Red'kina, О. В. Novikova

ANALYSIS OF NONLINEAR EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES ASSOCIATED WITH THE THIRD-ORDER SCATTERING OPERATOR

© Редькина Т. В., Новикова О. В., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. A plurality of nonlinear equations in partial derivatives having a Lax pair are either exactly integrable or equations that allow rich classes of exact solutions. The most interesting studies from a practical point of view were the development of new mathematical methods of analysis of non-linear differential equations, in particular, mathematical theory of solitons, which had huge prospects in various applications. Little research is the extensive class of nonlinear many-component equations of applied importance. The purpose of this article is to analyse this type of nonlinear equations, in particular the equation of three-wave interaction, as well as the structure of their exact solutions.

Materials and methods. Analysis of the considered nonlinear equations in the partial derivatives obtained by the Lax operator equation with first-order differential operators and third-order matrix coefficients is performed by variable substitution. This method allows them to be classified according to the main linear part and the initial equations to a simpler, equivalent species, which will be subject to further research. The traveling wave method is used to find accurate solutions.

Results. The studied nonlinear equations in the partial derivatives of the second-row with logarithmic nonlinearity belong to the Klein-Gordon class of equations and by replacing the variables their Liouville part is transformed to the hyperbolic species. Integral solutions of the studied equations in the form of traveling waves and solutions given implicitly in the form of a series have been found.

Conclusions. The results are of interest for the study of nonlinear differential equations having a Lax pair and can be used in solving applied problems of physics and engineering. These results provide an area of opportunity for studying problems of mathematical theory of solitons and can serve as a basis for further research and finding solutions to equations of this type.

Keywords: nonlinear equations in partial derivatives, Lax operator equation, Lax pair, nonlinear hyperbolic equations, solutions in the form of traveling waves.

Введение

Большинство нелинейных уравнений в частных производных, описываемых и исследуемых методами солитонной математики, получены с помощью операторного уравнения Лакса или уравнения нулевой кривизны, которые являются условием совместности пары линейных дифференциальных систем [1–3]. Всестороннее и углубленное изучение показало случай, когда для получения таких уравнений применялись системы второго порядка [4–7]. Менее исследован случай, когда размерность систем $n \geq 3$, который зачастую ведет к сильно переопределенным условиям [8]. Малоизучен класс нелинейных многокомпонентных уравнений, имеющих важность прикладного характера [9–12]. В работе [13] показана возможность использования линейных систем третьего порядка для получения нелинейных уравнений в частных производных, связанных с теорией солитонной математики, на случай многокомпонентных нелинейных уравнений, в частности уравнений трехволнового взаимодействия. В настоящей работе проведен анализ уравнений, полученных в работе [13], а также найдены некоторые точные решения в виде бегущих волн.

1. Материал и методика

Идея, лежащая в основе работы Лакса [14], заключается в том, что нелинейное уравнение

$$L_t = [L, A] = LA - AL,$$

где $[L, A] = LA - AL$ – коммутатор операторов L и A , L и A – операторная пара Лакса, эквивалентно системе линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi,$$

$$\varphi_t = -A\varphi,$$

где L и A – линейные дифференциальные операторы. Для оператора L поставлена спектральная задача (φ – собственная функция, μ – собственное значение оператора L), оператор A определяет эволюцию собственных функций по времени.

В работе [13] авторами показано, что уравнение Лакса сводится к системе девяти уравнений, порядок которой можно понизить и свести к одному нелинейному уравнению в частных производных. В работе продемонстрированы примеры вывода нелинейных уравнений в частных производных и определение их пары Лакса в двух случаях: когда главный дифференциальный коэффициент рассматривается в виде нижнетреугольной матрицы и в случае, если постоянная матрица имеет диагональный вид. В результате получены нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с логарифмической нелинейностью.

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2 u_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \frac{u_{zx}}{u} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} \frac{u_{zz}}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}^2}\right)^2 u_z \ln u = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2\right) u_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \frac{u_{zx}}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}^2}\right)^2 u_z \ln u = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}\right)^2 - 2 \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2\right) uu_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} u_{zx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} u_{zz} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\left(\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2\right) (u^2)_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} u_{zx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} u_{zz} + \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2 (u^2)_z \ln u = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\alpha_{21}k}{2\alpha_{11}} u_z + (\ln u)_{zz} = (k\alpha_{11})^2 (\ln u)_{xx}, \quad (5)$$

$$u^2 \left(\beta_{22} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) [(\ln u)_x - u] + u_x = 0, \quad (6)$$

где α_{ij} , β_{ij} – параметры квадратных матриц третьего порядка $\alpha = (\alpha_{ij})$, $\beta = (\beta_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, операторов L и A в уравнении Лакса соответственно, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, k - \text{const}$.

2. Анализ гиперболических уравнений

Уравнения (1)–(6) относятся к классу уравнений Клейна – Гордона [15]:

$$u_{xt} = F(u, u_t, u_x).$$

Утверждение 1. Уравнение (1) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \eta), \quad \xi = \alpha_{31}x - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})t, \quad \eta = x - 2k\alpha_{11}t,$$

преобразуется к гиперболическому виду

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}}u[1 + 2\ln u]u_\xi - u_\eta\xi = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Перейдем в (1) в линейной части к переменным x , t , используя представление дифференциального оператора

$$2k\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8)$$

а нелинейную часть оставим без изменения, тогда уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2} \right)^2 uu_z[1 + 2\ln u] + k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{xx} + \\ & + \left(2\alpha_{31} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \right)u_{tx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}}u_{tt} = 0. \end{aligned}$$

Линейная часть вторых производных с постоянными коэффициентами может быть преобразована к одному из канонических видов с помощью характеристик. Составим характеристическое уравнение для линейной части:

$$k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \left(2\alpha_{31} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right)\frac{dt}{dx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} = 0,$$

имеются две действительные характеристики

$$t - \frac{\alpha_{31}x}{k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})} = C_1, \quad t - \frac{1}{2k\alpha_{11}}x = C_2.$$

Следовательно, замена переменных приведет уравнение к гиперболическому виду. Выполним замену:

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \eta), \quad \xi = \alpha_{31}x - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})t, \quad \eta = x - 2k\alpha_{11}t.$$

$$u_x = \alpha_{31}u_\xi + u_\eta, \quad u_t = -k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_\xi - 2k\alpha_{11}u_\eta,$$

$$u_{xx} = (\alpha_{31})^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha_{31}u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xt} = -\alpha_{31}k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\xi\xi} - k(4\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} - 2k\alpha_{11}u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = k^2(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})^2 u_{\xi\xi} + 4k^2\alpha_{11}(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} + 4(k\alpha_{11})^2 u_{\eta\eta},$$

и уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2} \right)^2 u[1 + 2\ln u][2k\alpha_{11}\{\alpha_{31}u_\xi + u_\eta\} - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_\xi - \\ & - 2k\alpha_{11}u_\eta] + k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})[(\alpha_{31})^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha_{31}u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}] + \\ & + \left(2\alpha_{31} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \right) \left[-\alpha_{31}k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\xi\xi} - \right. \\ & \left. - k(4\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} - 2k\alpha_{11}u_{\eta\eta} \right] + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} \times \\ & \times \left[k^2(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})^2 u_{\xi\xi} + 4k^2\alpha_{11}(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} + 4(k\alpha_{11})^2 u_{\eta\eta} \right] = 0; \end{aligned}$$

$$u_{\xi\xi}: \quad k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})(\alpha_{31})^2 - k\alpha_{31}(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})\alpha_{31} = 0,$$

$$u_{\eta\eta}: \quad k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21}) + (-2\alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{32}\alpha_{21})k = 0,$$

$$u_{\eta\xi}: \quad 4\alpha_{31}k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21}) - \frac{k}{2\alpha_{11}}(4\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})^2 = -\frac{k(\alpha_{32}\alpha_{21})^2}{2\alpha_{11}},$$

после сокращения на $\frac{k(\alpha_{32}\alpha_{21})^2}{2\alpha_{11}}$ уравнение примет гиперболический вид

(7). Теорема доказана.

Следствие 1. Уравнение (7) при замене функции

$$u(\xi, \eta) = e^{v(\xi, \eta)}, \quad (9)$$

где $v(\xi, \eta)$ – новая неизвестная функция, примет вид

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} e^v [1 + 2v]v_\xi - v_\xi v_\eta. \quad (10)$$

Уравнение (2) уже имеет канонический вид гиперболического типа, так как оператор (8) задает переход от независимых переменных x, t к переменным z, t :

$$u(x, t) \rightarrow u(z, t), \quad z = x - 2k\alpha_{11}t.$$

Аналогичные рассуждения относятся и к уравнению (3).

Лемма. Уравнения (2), (3) имеют канонический вид гиперболического типа.

Утверждение 2. Уравнение (4) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \eta), \quad \xi = \alpha_{31}x - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})t, \quad \eta = x - 2k\alpha_{11}t,$$

преобразуется к гиперболическому виду

$$(a + b \ln u)(u^2)_{\xi} - u_{\xi\eta} = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \frac{1}{2\alpha_{11}} \left(\frac{\alpha_{31}^2}{\alpha_{32}\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^3} \right) = a, \quad \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^4} = b.$$

Доказательство проводится аналогично теореме 1.

Следствие 2. Уравнение (11) при замене функции (9) примет вид

$$v_{\eta\xi} = (a + bv)e^v v_{\xi} - v_{\xi} v_{\eta}. \quad (12)$$

Уравнение (5) в переменных x, t имеет вид

$$\frac{\alpha_{21}k}{2\alpha_{11}} [2k\alpha_{11}u_x + u_t] + 3(k\alpha_{11})^2 (\ln u)_{xx} + 4k\alpha_{11} (\ln u)_{xt} + (\ln u)_{tt} = 0. \quad (13)$$

Утверждение 3. Уравнение (13) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow e^{v(\xi, \eta)}, \quad \xi = k\alpha_{11}t - x, \quad \eta = 3k\alpha_{11}t - x,$$

преобразуется к гиперболическому виду:

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v [v_{\eta} - v_{\xi}]. \quad (14)$$

Доказательство. Выполним в уравнении (13) замену функции так, чтобы вторые производные давали линейную часть, т.е.

$$u(x, t) \rightarrow e^{v(\xi, \eta)},$$

где $v(\xi(x, t), \eta(x, t))$ – новая неизвестная функция, а новые переменные ξ, η преобразовывали эту линейную часть к одному из канонических видов. Для этого составим характеристическое уравнение для линейной части

$$3(k\alpha_{11})^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - 4k\alpha_{11} \frac{dt}{dx} + 1 = 0,$$

и вычислим характеристики

$$t - \frac{1}{k\alpha_{11}}x = C_1, \quad t - \frac{1}{3k\alpha_{11}}x = C_2.$$

Так как получены две действительные характеристики, то уравнение приведет к гиперболическому типу. Замена переменных

$$\begin{aligned} u(x, t) &\rightarrow e^{v(\xi, \eta)}, \quad \xi = k\alpha_{11}t - x, \quad \eta = 3k\alpha_{11}t - x, \\ v_x &= -v_\xi - v_\eta, \quad v_t = k\alpha_{11}v_\xi + 3k\alpha_{11}v_\eta, \\ v_{tt} &= (k\alpha_{11})^2 v_{\xi\xi} + 6(k\alpha_{11})^2 v_{\eta\xi} + 9(k\alpha_{11})^2 v_{\eta\eta}, \quad v_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}, \\ v_{xt} &= -k\alpha_{11}v_{\xi\xi} - 4k\alpha_{11}v_{\eta\xi} - 3k\alpha_{11}v_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

после подстановки в уравнение (13) даст равенство (14).

Утверждение 4. Уравнение (6) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow e^{v(\xi, \eta)}, \quad \xi = x - \beta_{22}t, \quad t = t,$$

преобразуется к гиперболическому виду

$$v_{t\xi} = e^v v_t - e^{-v} v_\xi.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично.

3. Построение точных решений в виде бегущих волн

Решения вида бегущих волн называются решениями вида

$$v(\xi, \eta) = f(\zeta), \quad \zeta = \gamma\xi + \eta, \quad (15)$$

где величина γ играет скорость распространения волны [16, 17].

Профили решений вида бегущей волны в различные моменты времени образуются друг из друга преобразованием сдвига. Нахождение решений в виде бегущих волн выполняется прямой подстановкой выражения (15) и частных производных функции $v(\xi, \eta)$ в исходное уравнение.

Для уравнений (10), (12), (14) будем искать решение в виде функции (15). Выразим частные производные функции $v(\xi, \eta)$ и подставим в (12):

$$f'' = e^f [a + bf]f' - (f')^2. \quad (16)$$

Так как равенство не содержит независимой переменной в явном виде, то его порядок можно понизить, положив: f – новая независимая переменная, $f' = p(f)$ – новая функция, тогда (16) сведется к уравнению первого порядка

$$pp' = e^f [a + bf]p - p^2,$$

или при условии, что $p \neq 0$, получаем линейное уравнение

$$p' = e^f [a + bf] - p.$$

Его решение:

$$p(f) = \frac{1}{4}e^f [2a + 2bf - b] + C_1 e^{-f},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Решение исходного уравнения определим из обращения следующего интеграла:

$$4 \int \frac{e^f df}{e^{2f} [2a + 2bf - b] + C_1} = \gamma \xi + \eta + C_2, \quad (17)$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Утверждение 5. Уравнение (12) имеет решение в виде бегущих волн (15), получаемое из обращения интеграла (17), где γ, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Следствие 3. Уравнение (10) имеет решение в виде бегущих волн (15), получаемое из обращения интеграла

$$\int \frac{e^f df}{e^{2f} f + C_1} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma \xi + \eta) + C_2, \quad (18)$$

где γ, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Если в (18) постоянная интегрирования $C_1 = 0$, то интеграл сводится к известному виду $\int \frac{e^{ay} dy}{y}$.

Определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t dt}{t} = Ei(x)$$

называется интегральной показательной функцией. Интеграл расходится в точке $t = 0$, в этом случае под $Ei(x)$ понимается главное значение несобственного интеграла:

$$Ei(x) = C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!},$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

где C – постоянная Эйлера.

Утверждение 6. Уравнение (10) имеет решение, заданное неявно в виде ряда

$$\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma \xi + \eta) + C_2,$$

где постоянная γ ; C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Выполним простую проверку, для этого выразим из (10) производные $v_{\xi\eta}, v_{\xi}, v_{\eta}$:

$$v_{\xi} \left(\frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^{n-1}}{n!} \right) = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma,$$

в левой части вынесем дробь $1/v$ за скобки и заменим полученную сумму показательной функцией

$$v_{\xi} \frac{1}{v} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n!} \right) = v_{\xi} \frac{1}{v} e^{-v},$$

в результате получим v_{ξ} :

$$v_{\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma v e^v. \quad (19)$$

Аналогичные действия приводят к v_{η} :

$$v_{\eta} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^v. \quad (20)$$

Продифференцируем (20) еще раз по переменной ξ , тогда

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (v+1) e^v v_{\xi},$$

выполняя замену (19), получим

$$v_{\eta\xi} = \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \right)^2 \gamma (v+1) v e^{2v}.$$

Подставим найденные производные в уравнение (10), имеем

$$\left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \right)^2 \gamma (v+1) v e^{2v} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left(e^v [1+2v] - v e^v \right) \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma v e^v.$$

Очевидно, что равенство выполняется тождественно.

Следствие 4. Уравнение (12) имеет решение в виде бегущих волн (15), получаемое из обращения интеграла

$$\ln \left| \frac{2a-b}{2b} + v \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \left(\frac{2a-b}{2b} + v \right)^n = 2b e^{\frac{1-a}{2b}} (\gamma\xi + \eta) + C_2,$$

где γ, C_2 – постоянные интегрирования.

Утверждение 7. Уравнение (14) имеет решение в виде бегущих волн (15)

$$v(\xi, \eta) = \ln C_1 + C_1 [\gamma\xi + \eta] - \ln \left| \frac{1}{C_2} - e^{\frac{C_1\alpha_{21}[1-\gamma]}{8\gamma\alpha_{11}^2} [\gamma\xi + \eta]} \right|,$$

где γ, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Заключение

Результаты исследований представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, обладающих парой Лакса, и могут использоваться при решении прикладных задач физики и техники. Данные результаты расширяют область возможностей для изучения задач математической теории солитонов и могут послужить основой для дальнейшего исследования и нахождения решений рассматриваемых уравнений и других уравнений солитонного типа.

Библиографический список

1. Ablowitz, M. J. A. Solitons, nonlinear equations and inverse scattering / M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
2. Богоявленский, О. И. Опрокидывающиеся солитоны в двумерных интегрируемых уравнениях / О. И. Богоявленский // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 4 (274). – С. 17–77.
3. Calogero, F. A method to generate solvable nonlinear evolution equations / F. Calogero // Lett. Nuovo Cimento. – 1975. – Vol. 14. – P. 443–447.
4. Редькина, Т. В. Нелинейные уравнения, интегрируемые методами солитонной математики : монография / Т. В. Редькина. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 161 с.
5. Редькина, Т. В. Комплексификация иерархии уравнения Кортевега – де Вриза : монография / Т. В. Редькина. – Ставрополь : Изд-во СКФУ, 2015. – 67 с.
6. Новикова, О. В. Исследование комплекснозначного нелинейного уравнения в частных производных / О. В. Новикова // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. – 2012. – № 4. – С. 160–166.
7. Новикова О. В. Исследование нелинейного комплексного дифференциального уравнения в частных производных, обладающего парой Лакса : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. – Воронеж, 2015. – 146 с.
8. Баданин, А. В. Оператор третьего порядка с периодическими коэффициентами на вещественной оси / А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, № 5. – С. 1–31.
9. Герджиков, В. С. О многокомпонентных уравнениях типа нелинейного уравнения Шредингера на симметричных пространствах и их редукциях / В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, Н. А. Костов // Теоретическая и математическая физика. – 2005. – Т. 144, № 2. – С. 313–323.
10. Герджиков, В. С. Многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера с постоянными граничными условиями / В. С. Герджиков, Н. А. Костов, Т. И. Валчев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 159, № 3. – С. 438–447.
11. On classification of soliton solutions of multicomponent nonlinear evolution equations / V. S. Gerdjikov, N. A. Kostov, T. I. Valcher, D. J. Kaup // Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical. – 2008. – Vol. 41, № 31. – P. 1–36.
12. Gerdjikov, V. S. Reductions of multicomponent MKDV equations on symmetric spaces of DIII-type / V. S. Gerdjikov, N. A. Kostov // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2008. – Vol. 4. – P. 1–30.
13. Сурнева, О. Б. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка / О. Б. Сурнева, О. С. Яновская // Наука. Инновации. Технологии. – 2018. – № 3. – С. 37–52.
14. Лакс, П. Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны / П. Д. Лакс // Математика. – 1969. – Т. 13, № 5. – С. 128–150.

15. Бете, Г. Квантовая механика / Г. Бете. – Москва : Мир, 1965. – 333 с.
16. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – Москва : Физматлит, 2005. – 256 с.
17. Тарасевич, Ю. Ю. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : метод. рекоменд. / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.

References

1. Ablowitz M. J. A., Clarkson P. A. *Solitons, nonlinear equations and inverse scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 516 p.
2. Bogoyavlenskiy O. I. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1990, vol. 45, no. 4 (274), pp. 17–77. [In Russian]
3. Calogero F. *Lett. Nuovo Cimento*. 1975, vol. 14, pp. 443–447.
4. Red'kina T. V. *Nelineynye uravneniya, integriruyemye metodami solitonnoy matematiki: monografiya* [Nonlinear equations integrable by methods of soliton mathematics: monograph]. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, 161 p. [In Russian]
5. Red'kina T. V. *Kompleksifikatsiya ierarkhii uravneniya Kortevega – de Vriza: monografiya* [Complexification of the hierarchy of the Korteweg - de Vries equation: monograph]. Stavropol: Izd-vo SKFU, 2015, 67 p. [In Russian]
6. Novikova O. V. *Vestnik Baltiyskogo federal'nogo universiteta im. I. Kanta* [Bulletin of Immanuel Kant Baltic Federal University]. 2012, no. 4, pp. 160–166. [In Russian]
7. Novikova O. V. *Issledovanie nelineynogo kompleksnogo differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh, obladayushchego paroy Laksa: dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02* [Investigation of a nonlinear complex partial differential equation with a Lax pair: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Voronezh, 2015, 146 p. [In Russian]
8. Badanin A. V., Korotyaev E. L. *Algebra i analiz* [Algebra and analysis]. 2013, vol. 25, no. 5, pp. 1–31. [In Russian]
9. Gerdzhikov V. S., Grakhovski G. G., Kostov N. A. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2005, vol. 144, no. 2, pp. 313–323. [In Russian]
10. Gerdzhikov V. S., Kostov N. A., Valchev T. I. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 159, no. 3, pp. 438–447. [In Russian]
11. Gerdjikov V. S., Kostov N. A., Valchev T. I., Kaup D. J. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*. 2008, vol. 41, no. 31, pp. 1–36.
12. Gerdjikov V. S., Kostov N. A. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. 2008, vol. 4, pp. 1–30.
13. Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovation. Technology]. 2018, no. 3, pp. 37–52. [In Russian]
14. Laks P. D. *Matematika* [Mathematics]. 1969, vol. 13, no. 5, pp. 128–150. [In Russian]
15. Bete G. *Kvantovaya mekhanika* [Quantum mechanics]. Moscow: Mir, 1965, 333 p. [In Russian]
16. Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 256 p. [In Russian]
17. Tarasevich Yu. Yu. *Nakhozhdenie i vizualizatsiya avtomodel'nykh resheniy differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh sredstvami Maple: metod. rekomend.* [Finding and visualizing self-similar solutions of partial differential equations by means of Maple: methodical recommendations]. Astrakhan, 2010, 23 p. [In Russian]

Редькина Татьяна Валентиновна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра прикладной математики
и математического моделирования,
Северо-Кавказский федеральный
университет (Россия, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1)

E-mail: tvr59@mail.ru

Red'kina Tat'jana Valentinovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of applied mathematics
and mathematical modeling, North
Caucasian Federal University
(1 Pushkina street, Stavropol, Russia)

Новикова Ольга Викторовна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра информационной
безопасности автоматизированных
систем, Северо-Кавказский федеральный
университет (Россия, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1)

E-mail: oly-novikova@yandex.ru

Novikova Ol'ga Viktorovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of information security
of automated systems, North Caucasian
Federal University (1 Pushkina street,
Stavropol, Russia)

Образец цитирования:

Редькина, Т. В. Анализ нелинейных уравнений в частных производных, связанных с оператором рассеяния третьего порядка / Т. В. Редькина, О. В. Новикова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 82–93. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-8.